

Σειρές Fourier

A. N. Γιαννακόπουλος,
Τμήμα Στατιστικής
ΟΠΑ

1 Εισαγωγή

Οι σειρές Fourier είναι ένα ιδιαίτερα χρήσιμο εργαλείο του Λογισμού που βρίσκει πολλές εφαρμογές σε διάφορα πεδία της επιστήμης, πχ στις χρονολογικές σειρές στην στατιστική, στην ανάλυση σήματος και εικόνας, στην οικονομετρία, την μηχανική κλπ.

Οι σειρές Fourier επινοήθηκαν από τον Γάλλο μαθηματικό και φυσικό Jean Baptiste Joseph Fourier (1768-1830) στην προσπάθεια του να μελετήσει την μετάδοση της θερμότητας στα στερεά και διατυπώθηκαν για πρώτη φορά στην μελέτη του στο θέμα αυτό η οποία και παρουσιάστηκε το 1807 στο Ινστιτούτο του Παρισιού. Από τότε μέχρι σήμερα οι σειρές Fourier και οι γενικεύσεις τους έχουν αποτελέσει αντικείμενο εντατικής μελέτης θεωρητικής αλλά και πολύ εφαρμοσμένης. Για να πειστείτε επ' αυτού κάντε μια σύντομη αναζήτηση με τον όρο Fourier series στο Google Scholar . Την στιγμή που γράφω αυτές τις σημειώσεις μου έδωσε 2.080.000 αποτελέσματα.

2 Περιοδικές συναρτήσεις

Ορισμός 2.1 Μια συνάρτηση $f : I \rightarrow \mathbb{R}$, ονομάζεται περιοδική με περίοδο T αν $f(x+T) = f(x)$ για κάθε $x \in I$.

Πολλά φυσικά, βιολογικά, κοινωνικά και οικονομικά φαινόμενα π.χ. οι εποχές και η θερμοκρασία ή οι οικονομικές υφέσεις έχουν επαναλαμβανόμενη (περιοδική) φύση. Τα αρχέτυπα των περιοδικών συναρτήσεων είναι οι συναρτήσεις $\sin$ και $\cos$.

Παράδειγμα 2.1 Η συνάρτηση $f(x) = \sin(nx)$, $n \in \mathbb{N}$ είναι περιοδική με περίοδο $T = \pi$. Πράγματι, $f(x+T) = \sin(nx + n\pi) = \sin(nx) = f(x)$.

Όμως το $T = \pi$ δεν είναι ο μικρότερος πραγματικός αριθμός για τον οποίο ισχύει $f(x+T) = f(x)$ για κάθε $x \in I$. Πραγματι έστω ότι προσπαθούμε να προσδιορίσουμε το T έτσι ώστε να ισχύει $f(x+T) = f(x)$ για κάθε $x \in I$. Αυτό μας δίνει την εξίσωση $\sin(nx + nT) = \sin(nx)$ δηλαδή $nT = \pi$ και $T = \frac{\pi}{n}$. Μπορούμε λοιπόν να θεωρήσουμε ως περίοδο της f τον αριθμό $T = \frac{\pi}{n}$.

Πρόταση 2.1 Αν T είναι περίοδος της συνάρτησης f τότε και nT είναι περίοδος για κάθε $n \in \mathbb{N}$. Σαν περίοδο μιας συνάρτησης λοιπόν θα θεωρούμε τον μικρότερο αριθμό T με την ιδιότητα $f(x+T) = f(x)$ για κάθε x

Απόδειξη: Έστω T περίοδος της f . Τότε για κάθε x ισχύει $f(x+T) = f(x)$. Ας πάρουμε οποιοδήποτε x και ας θεωρήσουμε το $x+T$. Τότε

$$f(x+2T) = f(x+T+T) = f(x+T) = f(x)$$

Άρα $2T$ περίοδος της f . Με επαγωγή δείχνουμε ότι αυτό ισχύει για nT όπου $n \in \mathbb{N}$. □

Πρόταση 2.2 Το άθροισμα (πεπερασμένων το πλήθος) περιοδικών συναρτήσεων με περίοδο T είναι περιοδική συνάρτηση με την ίδια περίοδο. Το ίδιο ισχύει και για τον γραμμικό συνδυασμό πεπερασμένων το πλήθος περιοδικών συναρτήσεων.

Απόδειξη: Θα δείξουμε ότι ο ισχυρισμός ισχύει για άθροισμα 2 συναρτήσεων και αφήνουμε τα υπόλοιπα για άσκηση. Έστω f_1, f_2 δύο περιοδικές συναρτήσεις με περίοδο T . Συνεπώς ισχύει

$$\begin{aligned} f_1(x+T) &= f_1(x), \quad \forall x \in I \\ f_2(x+T) &= f_2(x), \quad \forall x \in I \end{aligned}$$

Τότε

$$(f_1 + f_2)(x+T) = f_1(x+T) + f_2(x+T) = f_1(x) + f_2(x) = (f_1 + f_2)(x), \quad \forall x \in I.$$

άρα η συνάρτηση $f_1 + f_2$ είναι περιοδική με περίοδο T . □□□

Πολύ χρήσιμη είναι και η ακόλουθη παρατήρηση.

Πρόταση 2.3 Αν f περιοδική συνάρτηση με περίοδο T , τότε η συνάρτηση g που ορίζεται ως $g(x) = f(ax)$ είναι περιοδική με περίοδο $T_1 =$

Απόδειξη: Έστω ότι T_1 έχει την ιδιότητα $g(x+T_1) = g(x)$ για κάθε x . Τότε

$$g(x+T_1) = f(a(x+T_1)) = f(ax+aT_1)$$

Αν επιλέξουμε $aT_1 = T$ δηλαδή $T_1 = \frac{T}{a}$ τότε

$$g(x+T_1) = f(ax+aT_1) = f(ax+T) = f(ax) = g(x),$$

και ο ισχυρισμός αποδείχθηκε. □□□

3 Οι οικογένειες συναρτήσεων $\sin(nx)$ και $\cos(nx)$

Θα θεωρήσουμε την ειδική περίπτωση $I = [-\pi, \pi]$ και θα μελετήσουμε τις οικογένειες συναρτήσεων $\{\sin(nx), \cos(nx)\}$, $n \in \mathbb{N}$.

Αρχικά βλέπουμε ότι όλα τα μέλη της οικογένειας αυτής είναι περιοδικές συναρτήσεις με περίοδο $T = 2\pi$. Όμως, οι συναρτήσεις αυτές έχουν και άλλες πιο ενδιαφέρουσες ιδιότητες.

Πρόταση 3.1 Οι συναρτήσεις $\{\sin(nx), \cos(nx)\}$, $n \in \mathbb{N}$ ικανοποιούν τις ιδιότητες:

$$(i) \int_{-\pi}^{\pi} \sin(nx) \sin(mx) = \pi \delta_{nm},$$

$$(ii) \int_{-\pi}^{\pi} \cos(nx) \cos(mx) = \pi \delta_{nm},$$

$$(iii) \int_{-\pi}^{\pi} \sin(nx) \cos(mx) = 0,$$

όπου δ_{nm} είναι το επιλεγόμενο δελτα του Kronecker που ορίζεται ως

$$\delta_{nm} = \begin{cases} 0, & n \neq m \\ 1, & n = m. \end{cases}$$

Απόδειξη: Θα δείξουμε την (i) αφήνοντας τις άλλες σαν άσκηση. Θυμηθείτε την τριγωνομετρική ταυτότητα

$$\sin(a) \sin(b) = \frac{1}{2} \cos(a-b) - \frac{1}{2} \cos(a+b)$$

η οποία ισχύει για κάθε a, b . Ας πάρουμε πρώτα την περίπτωση $n \neq m$ και ας θέσουμε $a = nx$ και $b = mx$. Αυτό μας δίνει

$$\sin(nx) \sin(mx) = \frac{1}{2} \cos((n-m)x) - \frac{1}{2} \cos((n+m)x)$$

Κατά συνέπεια

$$\begin{aligned} \int_{-\pi}^{\pi} \sin(nx) \sin(mx) dx &= \frac{1}{2} \int_{-\pi}^{\pi} \cos((n-m)x) dx - \frac{1}{2} \int_{-\pi}^{\pi} \cos((n+m)x) dx \\ &= \frac{1}{2} \left. \frac{\sin((n-m)x)}{n-m} \right|_{-\pi}^{\pi} - \frac{1}{2} \left. \frac{\sin((n+m)x)}{n+m} \right|_{-\pi}^{\pi} = 0 \end{aligned}$$

Η περίπτωση $n = m$ απαιτεί λίγο παραπάνω προσοχή. Αν $a = b = nx$ η τριγωνομετρική ταυτότητα μας δίνει

$$\sin(nx)^2 = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \cos(2n)$$

άρα

$$\begin{aligned} \int_{-\pi}^{\pi} \sin(nx)^2 dx &= \frac{1}{2} \int_{-\pi}^{\pi} 1 dx - \frac{1}{2} \int_{-\pi}^{\pi} \cos(2nx) dx \\ &= \pi - \frac{1}{2} \frac{\sin(2nx)}{2n} \Big|_{-\pi}^{\pi} = \pi. \end{aligned}$$

Για τα υπόλοιπα απλά χρησιμοποιείτε τις τριγωνομετρικές ταυτότητες για το γινόμενο συνημιτόνων ή γινόμενο συνημιτόνων και ημιτόνων. 

4 Σειρές Fourier

Ας υποθέσουμε ότι μια συνάρτηση f μπορεί να γραφεί σαν γραμμικός συνδυασμός ημιτόνων και συνημιτόνων που είναι μέλη της παραπάνω οικογένειας, υπό την έννοια ότι για κάθε $x \in [-\pi, \pi]$ ισχύει

$$f(x) = \frac{1}{2}a_0 + \sum_{n \neq 0} a_n \cos(nx) + \sum_{n \neq 0} b_n \sin(nx) \quad (1)$$

Αν υποθέσουμε (και αυτή είναι μια πολύ σημαντική υπόθεση, γιατί δεν μπορούμε να το κάνουμε πάντοτε για όλες τις σειρές) ότι μας επιτρέπεται να ολοκληρώσουμε την παραπάνω σχέση όρο προς όρο τότε μπορούμε να καθορίσουμε με μοναδικό τρόπο τους συντελεστές $a_0, a_n, b_n, n \in \mathbb{N}$, από τα ολοκληρώματα της συνάρτησης f .

Πρόταση 4.1 Ας υποθέσουμε ότι ισχύει η (1). Τότε θα πρέπει

$$a_0 = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) dx, \quad a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos(nx) dx, \quad b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin(nx) dx, \quad n \in \mathbb{N}, n \neq 0$$

Απόδειξη: Ας ολοκληρώσουμε αυτή την συνάρτηση επάνω στο διάστημα $[-\pi, \pi]$. Παρατηρώντας ότι

$$\int_{-\pi}^{\pi} \cos(nx) dx = 0, \quad \int_{-\pi}^{\pi} \sin(nx) dx = 0, \quad \forall n \in \mathbb{N}, n \neq 0$$

έχουμε ότι

$$\begin{aligned} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) dx &= \int_{-\pi}^{\pi} a_0 dx + \sum_{n \neq 0} a_n \int_{-\pi}^{\pi} \cos(nx) dx + \sum_{n \neq 0} b_n \int_{-\pi}^{\pi} \sin(nx) dx \\ &= \pi a_0 + 0 + 0 = \pi a_0. \end{aligned}$$

Ας πολλαπλασιάσουμε αυτή την συνάρτηση με την συνάρτηση $\cos(mx)$, $m \neq 0$, και ας ολοκληρώσουμε επάνω στο διάστημα $[-\pi, \pi]$. Έχουμε ότι

$$f(x) \cos(mx) = a_0 \cos(mx) + \sum_{n \neq 0} a_n \cos(nx) \cos(mx) + \sum_{n \neq 0} b_n \sin(nx) \cos(mx)$$

οπότε

$$\begin{aligned} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos(mx) dx &= a_0 \int_{-\pi}^{\pi} \cos(mx) dx + \sum_{n \neq 0} a_n \int_{-\pi}^{\pi} \cos(nx) \cos(mx) dx + \sum_{n \neq 0} b_n \int_{-\pi}^{\pi} \sin(nx) \cos(mx) dx \\ &= \sum_{n \neq 0} a_n \pi \delta_{nm} + 0 = \pi a_m \end{aligned}$$

Όμοια για τα b_m . 

Ας γυρίσουμε τώρα ανάποδα την προσέγγιση μας. Ας υποθέσουμε ότι έχουμε μια δεδομένη συνάρτηση $f : [-\pi, \pi] \rightarrow \mathbb{R}$ η οποία είναι ολοκληρώσιμη και ας ορίσουμε τους συντελεστές

$$a_0 = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) dx, \quad a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos(nx) dx, \quad b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin(nx) dx, \quad n \in \mathbb{N}, n \neq 0$$

Κατόπιν κατασκευάζουμε την συνάρτηση $\hat{f}$ έτσι ώστε

$$\hat{f}(x) = \frac{1}{2}a_0 + \sum_{n \neq 0} a_n \cos(nx) + \sum_{n \neq 0} b_n \sin(nx) \quad (2)$$

Ορισμός 4.1 Η συνάρτηση $\hat{f} : [-\pi, \pi] \rightarrow \mathbb{R}$ η οποία ορίζεται από την (2) ονομάζεται σειρά Fourier της συνάρτησης f .

Το ακόλουθο θεώρημα το οποίο παρατίθεται χωρίς απόδειξη μας εξασφαλίζει την σύγκλιση των σειρών Fourier.

Θεώρημα 4.1 Έστω η συνάρτηση $f : [-\pi, \pi] \rightarrow \mathbb{R}$ και $\hat{f}$ η σειρά Fourier που παράγεται από αυτή. Ας υποθέσουμε επίσης ότι η συνάρτηση f ορίζεται σε κάθε σημείο του $[-\pi, \pi]$ εκτός ίσως από πεπερασμένα το πλήθος σημεία, είναι περιοδική αν επεκταθεί εκτός του $[-\pi, \pi]$ και οι συναρτήσεις f και f' είναι κατά τμήματα συνεχείς στο $[-\pi, \pi]$. Τότε,

- (i) Αν x είναι σημείο συνέχειας της f τότε η σειρά Fourier της f στο σημείο αυτό συγκλίνει στο $f(x)$, δηλαδή $\hat{f}(x) = f(x)$.
- (ii) Αν x είναι σημείο ασυνέχειας της f τότε η σειρά Fourier της f στο σημείο αυτό συγκλίνει στο $\frac{f(x^-) + f(x^+)}{2}$, δηλαδή $\hat{f}(x) = \frac{f(x^-) + f(x^+)}{2}$.

Παράδειγμα 4.1 Υπολογίστε την

5 Σειρές Fourier σε γενικά διαστήματα

Ας υποθέσουμε ότι η συνάρτηση f είναι ορισμένη στο διάστημα $[-L, L]$ αντί για το $[-\pi, \pi]$. Ο μετασχηματισμός $x \mapsto y, y = ax + b$ για $a = \frac{\pi}{L}, b = 0$ μετασχηματίζει το διάστημα $[-L, L]$ στο διάστημα $[-\pi, \pi]$. Ως προς την καινούργια μεταβλητή y μπορούμε να πάρουμε την σειρά Fourier με βάση τα προηγούμενα

$$f(x) = \frac{1}{2}a_0 + \sum_{n \neq 0} a_n \cos\left(n \frac{\pi x}{L}\right) + \sum_{n \neq 0} b_n \sin\left(n \frac{\pi x}{L}\right), \quad (3)$$

$$a_0 = \frac{1}{L} \int_{-L}^L f(x) dx, \quad a_n = \frac{1}{L} \int_{-L}^L f(x) \cos\left(n \frac{\pi x}{L}\right) dx, \quad b_n = \frac{1}{L} \int_{-L}^L f(x) \sin\left(n \frac{\pi x}{L}\right) dx, \quad n \in \mathbb{N}, n \neq 0$$

6 Άρτιες και περιττές συναρτήσεις

Ορισμός 6.1 (Άρτιες και περιττές συναρτήσεις)

- (i) Μια συνάρτηση $f : [-L, L] \rightarrow \mathbb{R}$ ονομάζεται άρτια αν $f(-x) = f(x)$, για κάθε $x \in [-L, L]$.
- (ii) Μια συνάρτηση $f : [-L, L] \rightarrow \mathbb{R}$ ονομάζεται περιττή αν $f(-x) = -f(x)$, για κάθε $x \in [-L, L]$.

Παράδειγμα 6.1 Οι συναρτήσεις $\cos\left(n \frac{\pi x}{L}\right)$ είναι άρτιες ενώ οι συναρτήσεις $\sin\left(n \frac{\pi x}{L}\right)$ είναι περιττές.

Πρόταση 6.1 (Σειρές Fourier για άρτιες και περιττές συναρτήσεις)

(i) Μια άρτια συνάρτηση $f : [-L, L] \rightarrow \mathbb{R}$ έχει σειρά Fourier της μορφής

$$f(x) = a_0 + \sum_{n \neq 0} a_n \cos\left(n \frac{\pi x}{L}\right)$$

όπου

$$a_0 = \frac{2}{L} \int_0^L f(x) dx, \quad a_n = \frac{2}{L} \int_0^L f(x) \cos\left(n \frac{\pi x}{L}\right) dx$$

(ii) Μια περιττή συνάρτηση $f : [-L, L] \rightarrow \mathbb{R}$ έχει σειρά Fourier της μορφής

$$f(x) = \sum_{n \neq 0} b_n \sin\left(n \frac{\pi x}{L}\right),$$

όπου

$$b_n = \frac{2}{L} \int_0^L f(x) \sin\left(n \frac{\pi x}{L}\right) dx, \quad n \in \mathbb{N}, n \neq 0$$

Απόδειξη: Ας θεωρήσουμε ότι η f είναι άρτια. Τότε

$$\begin{aligned} b_n &= \frac{1}{L} \int_{-L}^L f(x) \sin\left(n \frac{\pi x}{L}\right) dx = \frac{1}{L} \int_{-L}^0 f(x) \sin\left(n \frac{\pi x}{L}\right) dx + \frac{1}{L} \int_0^L f(x) \sin\left(n \frac{\pi x}{L}\right) dx \\ &= -\frac{1}{L} \int_0^L f(x) \sin\left(n \frac{\pi x}{L}\right) dx + \frac{1}{L} \int_0^L f(x) \sin\left(n \frac{\pi x}{L}\right) dx = 0 \end{aligned}$$

όπου στο πρώτο ολοκλήρωμα κάναμε την αλλαγή μεταβλητών $y = -x$. Όμοια παίρνουμε την σχέση που δίνουμε για τους συντελεστές a_n . Όμοια για τις περιττές συναρτήσεις. 

7 Άρτιες και περιττές επεκτάσεις

Πολλές φορές μια συνάρτηση f ορίζεται μόνο στο διάστημα $[0, L]$. Μπορούμε να την ορίσουμε σε όλο το $[-L, L]$ επεκτείνοντας την συνάρτηση f κατάλληλα. Η επέκταση μπορεί να γίνει με δύο τουλάχιστον τρόπους, που οδηγούν σε εύκολα αναπτύγματα για την σειρά Fourier.

Ορισμός 7.1 (Άρτια επέκταση) Έστω $f : [0, L] \rightarrow \mathbb{R}$ μία δεδομένη συνάρτηση. Η άρτια επέκταση f_e της συναρτησης f είναι η συνάρτηση $f_e : [-L, L] \rightarrow \mathbb{R}$ η οποία ορίζεται ως

$$f_e(x) = \begin{cases} f(x), & x \in [0, L]. \\ f(-x), & x \in [-L, 0]. \end{cases}$$

Η f_e είναι μια άρτια συνάρτηση.

Ορισμός 7.2 (Περιττή επέκταση) Έστω $f : [0, L] \rightarrow \mathbb{R}$ μία δεδομένη συνάρτηση. Η περιττή επέκταση f_o της συναρτησης f είναι η συνάρτηση $f_o : [-L, L] \rightarrow \mathbb{R}$ η οποία ορίζεται ως

$$f_o(x) = \begin{cases} f(x), & x \in [0, L], \\ -f(-x), & x \in [-L, 0]. \end{cases}$$

Η f_o είναι μια περιττή συνάρτηση.

Τόσο η f_e όσο και η f_o ταυτίζονται με την f στο διάστημα $[0, L]$, αλλά είναι διαφορετικές μεταξύ τους στο διάστημα $[-L, 0]$. Όταν θελήσουμε να βρούμε την σειρά Fourier για την f , μπορούμε να βρούμε είτε την σειρά Fourier της άρτιας επέκτασης f_e , είτε την σειρά Fourier της περιττής επέκτασης f_o , οι οποίες θα πρέπει να ταυτίζονται με την σειρά Fourier της f στο διάστημα $[-L, L]$. Οι δυο αυτές σειρές όμως θα είναι διαφορετικές.

Πρόταση 7.1 (Σειρές Fourier για την άρτια και περιττή επέκταση) Έστω $f : [0, L] \rightarrow \mathbb{R}$.

(i) Η σειρά συνημιτόνων της f (δηλαδή η σειρά της άρτιας επέκτασης) είναι η

$$f(x) = a_0 + \sum_{n \neq 0} a_n \cos\left(n \frac{\pi x}{L}\right)$$

όπου

$$a_0 = \frac{2}{L} \int_0^L f(x) dx, \quad a_n = \frac{2}{L} \int_0^L f(x) \cos\left(n \frac{\pi x}{L}\right) dx$$

(ii) Η σειρά ημιτόνων της f (δηλαδή η σειρά της περιττής επέκτασης) είναι η

$$f(x) = \sum_{n \neq 0} b_n \sin\left(n \frac{\pi x}{L}\right),$$

όπου

$$b_n = \frac{2}{L} \int_0^L f(x) \sin\left(n \frac{\pi x}{L}\right) dx, \quad n \in \mathbb{N}, n \neq 0$$

Απόδειξη: Προκύπτει από άμεση εφαρμογή της Πρότασης 6.1, βάσει του οποίου η σειρά για την άρτια επέκταση θα είναι μια σειρά συνημιτόνων ενώ η σειρά για την περιττή επέκταση θα είναι μια σειρά ημιτόνων. 

Σχόλιο 7.1 Επίσης, σύμφωνα με το θεώρημα σύγκλισης, η σειρά για την άρτια επέκταση θα συγκλίνει στο $x = 0$ στο $f(0)$, ενώ η σειρά για την περιττή επέκταση θα συγκλίνει στο $x = 0$ στο 0. Όμοια, στο $x = L$ οι σειρές της άρτιας και περιττής επέκτασης θα συγκλίνουν στα $f(L)$ και 0 αντίστοιχα.

Παράδειγμα 7.1 Υπολογίστε την σειρά συνημιτόνων της συνάρτησης $f : [0, \pi] \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \sin(x)$.

Πρόκειται για την σειρά Fourier της άρτιας επέκτασης της συνάρτησης f , δηλαδή της συνάρτησης

$$f_e(x) = \begin{cases} \sin(x) & x \in [0, \pi) \\ -\sin(x) & x \in [-\pi, 0) \end{cases}$$

Για την συνάρτηση αυτή έχουμε ότι

$$f(x) = a_0 + \sum_{n \neq 0} a_n \cos\left(n \frac{\pi x}{L}\right)$$

όπου

$$a_0 = \frac{2}{L} \int_0^L f(x) dx, \quad a_n = \frac{2}{L} \int_0^L f(x) \cos\left(n \frac{\pi x}{L}\right) dx,$$

όπου $L = \pi$.

Μπορούμε να υπολογίσουμε τους συντελεστές,

$$a_0 = \frac{2}{\pi} \int_0^\pi \sin(x) dx = \frac{2}{\pi} (-\cos(x)) \Big|_0^\pi = \frac{4}{\pi}$$

Επίσης,

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{2}{\pi} \int_0^\pi \sin(x) \cos(nx) dx = \frac{1}{\pi} \left\{ -\frac{\cos((n+1)x)}{n+1} + \frac{\cos((n-1)x)}{n-1} \right\} \Big|_0^\pi \\ &= \frac{1}{\pi} \left\{ \frac{1 + \cos(n\pi)}{n+1} - \frac{1 + \cos(n\pi)}{n-1} \right\} = -\frac{2}{\pi} \frac{1 + \cos(n\pi)}{n^2 - 1}, \quad n \neq 1. \end{aligned}$$

Η περίπτωση $n = 1$ πρέπει να αντιμετωπιστεί χωριστά,

$$a_1 = \frac{2}{\pi} \int_0^\pi \sin(x) \cos(x) dx = 0.$$

Η σειρά συνημιτόνων για το $f(x) = \sin(x)$ είναι λοιπόν η

$$\frac{2}{\pi} \left(1 - \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1 + \cos(n\pi)}{n^2 - 1} \cos(nx) \right).$$

Η σειρά αυτή συγκλίνει στο $\sin(x)$ για κάθε $x \in [0, \pi]$.